Esercitazione 01
Codifica Binaria

Soluzioni

Credits A. Montenegro

Codifica Binaria

Esercizio 1

Rappresentazione Posizionale - Base 10

BASE : 10

ALFABETO per la RAPPRESENTAZIONE :

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

sono 10 SIMBOLI !

il numero di simboli è rappresentabile con una sequenza di tali cifre

Si analizzi la sequenza : $(3\,1\,7\,4)_{10}$

10^3	10^2	10^1	10^0
3	1	7	4

→ PESO della CIFRA

il numero rappresentato è :

$$N = 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

$$= 3000 + 100 + 70 + 4$$

$$= 3174$$

CONVERSIONE del numero 3174 in base 10

	RESTO DIVISIONE INTERA per 10
3174	4
317	7
31	1
3	3
0	

$3174 \xrightarrow{/10} 317$; $3174 \xrightarrow{\%\,10} 4$

QUOZIENTE DIVISIONE INTERA per 10

CIFRA MENO SIGNIFICATIVA

CIFRA PIÙ SIGNIFICATIVA

Esercizio 2

Rappresentazione Posizionale - Base 2

$B = 2$

$A = \{0, 1\}$

CONVERTIRE in base 10 la SEQUENZA

$(1011)_2$

2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	1

→ PESO dei SIMBOLI

$$(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$= 8 + 0 + 2 + 1 = (11)_{10}$$

CONVERTIRE $(11)_{10}$ in base 2

Q_2	R_2
11	1
5	1
2	0
1	1
0	

Esercizio 3

Conversione da Base 10 a Base 2

Convertire il numero 124 (in base 10) in base 2. Si usi la semplice rappresentazione posizionale.

Quanti bit occorrono? almeno 7!

con 7 bit si possono rappresentare
$2^7 = 128$ valori nell'intervallo
$[0, 2^7-1] = [0, 127]$

$0 \to 0000000 \qquad 127 \to 1111111$

6 bit non bastano → numeri nell'intervallo
$[0, \underbrace{2^6-1}_{=63}]$

$\#BIT = \lceil \log_2 124 \rceil = 7$

Q_2	R_2
124	0
62	0
31	1
15	1
7	1
3	1
1	1
0	

$(124)_{10} = (1111100)_2$

SONO 7 BIT !

VERIFICHIAMO che il RISULTATO sia GIUSTO

$$\left(\begin{array}{ccccccc} \scriptstyle 6 & \scriptstyle 5 & \scriptstyle 4 & \scriptstyle 3 & \scriptstyle 2 & \scriptstyle 1 & \scriptstyle 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)_2$$

$$= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

$$= 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 0 + 0$$

$$= (124)_{10}$$

Esercizio 4

Conversione da Base 10 a Base 2 e Somma

Usando la rappresentazione posizionale, convertire in base 2 i numeri 77 e 156. Sommare in base 2 i numeri ottenuti. Verificare che il risultato sia corretto.

A) CONVERSIONE del numero $(77)_{10}$

quanti bit? almeno 7 $\lceil \log_2 77 \rceil$ $[0, \overbrace{2^7-1}^{127}]$

77	1
38	0
19	1
9	1
4	0
2	0
1	1
0	

$$(77)_{10} = \begin{array}{ccccccc} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}_2$$

[VERIFICA : $2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0$
$= 64 + 8 + 4 + 1$
$= 77$ ... ok!]

B) CONVERSIONE del NUMERO $(156)_{10}$

156	0
78	0
39	1
19	1
9	1
4	0
2	0
1	1
0	

$\lceil \log_2 156 \rceil$

quanti bit? almeno 8

$[0, \underbrace{2^8 - 1}_{255}]$

$$(156)_{10} = (\overset{7\,6\,5\,4\,3\,2\,1\,0}{10011100})_2$$

[VERIFICA: $2^7 + 2^4 + 2^3 + 2^2$
$= 128 + 16 + 8 + 4$
$= 156$ ... ok!]

C) SOMMA tra $(10011100)_2$ e $(1001101)_2$

PROBLEMA! i numeri non hanno lo stesso numero di bit ... in questa rappresentazione si possono aggiungere "0" nelle posizioni più significative senza alterazioni

BIT AGGIUNTO

		1		1	1				
0	1	0	0	1	1	0	1		77
1	0	0	1	1	1	0	0		156
1	1	1	0	1	0	0	1		233

?

VERIFICA : $156 + 77 = 233$

$$\begin{array}{cccccccc} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$(11101001)_2$$

$$= 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^0$$

$$= 128 + 64 + 32 + 8 + 1$$

$$= 233$$

Esercizio 5

Somma in Rappresentazione Posizionale

Usando la rappresentazione posizionale, convertire in base due i numeri 125 e 156.

Effettuare la somma in base due e verificare il risultato.

A) CONVERSIONE $(156)_{10}$

$(156)_{10}$ = [... VEDI ESERCIZIO PRECEDENTE ...]

$$= (100\,111\,00)_2$$

B) CONVERSIONE $(125)_{10}$ (almeno 7 bit)

Q_2	R_2
125	1
62	0
31	1
15	1
7	1
3	1
1	1
0	

$$\begin{array}{ccccccc} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$(125)_{10} = (1111101)_2$$

[VERIFICA : $2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$

$$= 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 1$$

$$= 125 \text{]}$$

c) SOMMA

(NOTA: dobbiamo aggiungere uno '0' nella posizione più significativa di $(1111101)_2$)

$$
\begin{array}{c|cccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 125 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 156 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

OVERFLOW

$(125)_{10} + (156)_{10} = (281)_{10} \longrightarrow$ occorrono almeno 9 bit per rappresentare il numero

nella somma svolta, mantenendo lo stesso numero di bit degli addendi (i.e., 8) non si può rappresentare il numero giusto

RISULTATO : $(00011001)_2$

$= (\overset{4}{1}\overset{3}{1}\overset{2}{0}\overset{1}{0}\overset{0}{1})_2$

$= 2^4 + 2^3 + 2^0$

$= 16 + 8 + 1$

$= (25)_{10} \neq (281)_{10}$

se mantenessimo il bit di CARRY ?

$(\overset{8}{1}\overset{7}{0}\overset{6}{0}\overset{5}{0}\overset{4}{1}\overset{3}{1}\overset{2}{0}\overset{1}{0}\overset{0}{1})_2 = 2^8 + 25 = 256 + 25 = \underbrace{(281)_{10}}_{\text{ok!}}$

Esercizio 6

Conversione da Base 16 a Base 2 - Notazione Modulo e Segno

Usando la notazione modulo e segno, si convertano i numeri A170, -1B90 e CF412 (espressi in base 16) in base 2.

A) CONVERSIONE $(A170)_{16}$

ci sono due vie:

1) BASE 16 ⟶ BASE 10 ⟶ BASE 2

$(A170)_{16}$ $(41328)_{10}$ $(1010\ 0001\ 0111\ 0000)_2$

0 1010 0001 0111 0000

SEGNO

2) si passa direttamente da BASE 16 a BASE 2

ogni simbolo della BASE 16 fa parte dell' ALFABETO

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \overset{10}{A}, \overset{11}{B}, \overset{12}{C}, \overset{13}{D}, \overset{14}{E}, \overset{15}{F}\}$$

per rappresentare uno qualsiasi di questi simboli occorrono 4 bit ($[0, 2^4-1] = [0, 15]$)

$$(\underset{=10}{A}\quad 1\quad 7\quad 0)_{16}$$

1010 0001 0111 0000

ESPRIMO OGNI CIFRA CON 4 BIT

NOTA:
questo trucco vale anche per tutte le basi che sono potenze di 2

il modulo è $(1010\ 0001\ 0111\ 0000)_2$

per rappresentarlo in notazione MODULO e SEGNO, si aggiunge uno 0 nella posizione più significativa (dato che il numero di partenza è positivo)

$$\underbrace{0}_{\text{SEGNO}}\ \underbrace{1010\ 0001\ 0111\ 0000}_{\text{MODULO}}$$

B) CONVERSIONE $(-1B90)_{16}$

MODULO :

1	B = 11	9	0
0001	1011	1001	0000

SEGNO : 1

1 0001 1011 1001 0000 } 1 BIT per il segno, 16 BIT per il MODULO

$\Downarrow$ =

1 1 1011 1001 0000 } 1 BIT per segno, 13 BIT per MODULO

c) CONVERSIONE $(CF412)_{16}$

MODULO :

C	F	4	1	2
= 12	= 15			
1100	1111	0100	0001	0010

SEGNO : 0

0 1100 1111 0100 0001 0010 } 1 BIT per il SEGNO e 24 BIT per il MODULO

Esercizio 7

CP2: Conversione e Somma

Usando la notazione in CP2, si convertano i numeri 113 e 78. Con il risultato ottenuto si calcolino 113+78, 113-78 e 78-113. Si verifichino i risultati ottenuti.

NOTA : IL COMPLEMENTO a 2

- INTERVALLO di RAPPRESENTAZIONE con n bit

$$\boxed{[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]}$$

- Quanti bit per il numero N ?

$$\boxed{n = \lceil \log_2 |x+1| \rceil + 1}$$

- il bit più significativo ha peso NEGATIVO

A) CONVERSIONE $(113)_{10}$

per prima cosa si converte solo il modulo
(almeno 7 bit)

113	1
56	0
28	0
14	0
7	1
3	1
1	1
0	

$$(113)_{10} = (1110001)_2$$

$$= (01110001)_{CP2}$$

B) CONVERSIONE $(78)_{10}$

78	0
39	1
19	1
9	1
4	0
2	0
1	1
0	

$$(78)_{10} = (1001110)_2$$

$$= (01001110)_{CP2}$$

c) $(113)_{10} + (78)_{10}$ $[= (191)_{10}]$

$(113)_{10} = (0\,1110001)_{CP2}$

$(78)_{10} = (0\,1001110)_{CP2}$

$$\begin{array}{rcccccccc|l} & 1 & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 113 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 78 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

è giusto il risultato?

$$\begin{array}{cccccccc} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}_{CP2}$$

$= -2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

$= -128 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

$= (-65)_{10} \neq (191)_{10}$

C'è un OVERFLOW!
con $n = 8$ bit in CP2 si copre un intervallo:

$[-128, 127]$

posso usare un bit in più (in CP2 posso estendere le cifre significative senza compromettere il numero)

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
 & 1 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 113 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 78 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

$$= 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$= (191)_{10}$$

b) $(113)_{10} - (78)_{10}$ $[= (35)_{10}]$

$$(113)_{10} = (0\,1110001)_{CP2}$$

$$(78)_{10} = (0\,1001110)_{CP2}$$

ci serve -78 in CP2:

1) COMPLEMENTO i BIT di 78

$$
\left.\begin{array}{l}
0\,1001110 \\
10110001
\end{array}\right] \text{INVERTO i BIT}
$$

2) SOMMO 1 al COMPLEMENTO

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & 1 & \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

$$(-78)_{10} = (\overset{7}{1}\overset{6}{0}\overset{5}{1}\overset{4}{1}\overset{3}{0}\overset{2}{0}\overset{1}{1}\overset{0}{0})_{CP2}$$

[VERIFICA : $-2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^1$

$= -128 + 32 + 16 + 2$

$= -78$ ... ok]

ora si possono sommare 113 e -78

$$
\begin{array}{r|l}
\begin{array}{c|cccccccc}
1 & 1 & & 1 & 1 & & & & \\
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array} & \begin{array}{l} 113 \\ -78 \end{array}
\end{array}
$$

stiamo sommando un numero > 0 e uno < 0 in CP2 ⟹ no OVERFLOW

$$
\left(\begin{array}{cccccccc} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)_{CP2}
$$

$= 2^5 + 2^1 + 2^0 = 32 + 2 + 1 = (35)_{10}$ ok!

(si noti che il CARRY si butta)

E) $-113 + 78$ [$= -35$]

$(113)_{10} = (0\,111\,0001)_{CP2}$

$(78)_{10} = (0\,1001110)_{CP2}$

la prima cosa da fare è trovare l'opposto di 113:

1) complemento i bit
2) sommo 1 al numero complementato

$$
\begin{array}{cccccccc|}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & \downarrow & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
\quad (-113)_{10} = (10001111)_{CP2}
$$

ora si può svolgere l'operazione richiesta

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -113 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 78 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

stiamo sommando un numero >0 e uno <0 in CP2 $\Longrightarrow$ no OVERFLOW

... comunque facciamo un check

$$
(\overset{7}{1}\,\overset{6}{1}\,\overset{5}{0}\,\overset{4}{1}\,\overset{3}{1}\,\overset{2}{1}\,\overset{1}{0}\,\overset{0}{1})_{CP2} = -2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0
$$

$$
= -128 + 64 + 16 + 8 + 4 + 1
$$

$$
= (-35)_{10} \longrightarrow \text{ok!}
$$

Esercizio 8

Numeri Razionali Rappresentazione in Virgola Fissa

Utilizzando la rappresentazione in virgola fissa, si converta in base 2 il numero 6,365 con 8 bit per la parte frazionaria.

PARTE INTERA : $(6)_{10} = (110)_2$

PARTE FRAZIONARIA : $(0.365)_{10}$

$$0.365 \cdot 2 = \boxed{0} + 0.73$$
$$0.73 \cdot 2 = \boxed{1} + 0.46$$
$$0.46 \cdot 2 = \boxed{0} + 0.92$$
$$0.92 \cdot 2 = \boxed{1} + 0.84$$
$$0.84 \cdot 2 = \boxed{1} + 0.68$$
$$0.68 \cdot 2 = \boxed{1} + 0.36$$
$$0.36 \cdot 2 = \boxed{0} + 0.72$$
$$0.72 \cdot 2 = \boxed{1} + 0.44$$

$$(6.365)_{10} = (110.01011101)_2$$

verifichiamo che la parte frazionaria sia corretta

$$(0.\overset{-1}{0}\overset{-2}{1}\overset{-3}{0}\overset{-4}{1}\overset{-5}{1}\overset{-6}{1}\overset{-7}{0}\overset{-8}{1})_2$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8}$$

$$= \frac{2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1}{2^8}$$

$$= \frac{64 + 16 + 8 + 4 + 1}{2^8}$$

$$= \frac{93}{256} \approx 0.36328125$$

NOTA con 8 bit si può rappresentare un sottinsieme dell'intervallo

$$[0, 1 - 2^{-8}]$$
$$= [0, \approx 0.996\ldots]$$

l'errore di approssimazione è $< 2^{-8} = 0.00390625$

Esercizio 9

Calcolo di Potenze con Conversione in Binario degli Esponenti

Si calcoli il numero minimo di moltiplicazioni necessarie per calcolare il valore di x^{53}.

SOLUZIONE FACILE : $x^{53} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{53 \text{ VOLTE}}$

convertendo l'esponente di x in base 2, possiamo calcolare x^{53} in modo più efficiente

Q_2	R_2
53	1
26	0
13	1
6	0
3	1
1	1
0	

$$(53)_{10} = (\overset{5}{1}\overset{4}{1}\overset{3}{0}\overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{1})_2$$

[VERIFICA: $2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0$
$= 32 + 16 + 4 + 1$
$= 53$ ... ok]

$$53 = 32 + 16 + 4 + 1$$

<u>NOTA</u> : $x^A \cdot x^B = x^{A+B}$ e $x^{2A} = x^A \cdot x^A$

$$x^{53} = x^{32} \cdot x^{16} \cdot x^4 \cdot x^1$$

BASTA CALCOLARE x^{32} sfruttando le POTENZE di 2

$$x \longrightarrow \underset{= x \cdot x}{x^2} \longrightarrow \underset{= x^2 \cdot x^2}{x^4} \longrightarrow \underset{= x^4 \cdot x^4}{x^8} \longrightarrow \underset{= x^8 \cdot x^8}{x^{16}} \longrightarrow \underset{= x^{16} \cdot x^{16}}{x^{32}}$$

calcolando in questo modo x^{32}
possiamo "salvare" i valori che ci occorrono
per poi calcolare x^{53}

$$x^{53} = x^1 \cdot x^4 \cdot x^{16} \cdot x^{32}$$

QUANTE MOLTIPLICAZIONI ?

3 MOLTIPLICAZIONI FINALI + 5 MOLTIPLICAZIONI per il calcolo di x^{32} = 8 MOLTIPLICAZIONI $\ll$ 32 MOLTIPLICAZ. del caso BASE !